

ΛΥΣΕΙΣ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ 2022

ΘΕΜΑ Α

A₁. Σχολικό βιβλίο σελίδα 99

A₂. Σχολικό βιβλίο σελίδα 162

A₃. Σχολικό βιβλίο σελίδα 128-129

A₄. α. Σ β. Σ γ. Σ δ. Λ ε. Λ

ΘΕΜΑ Β

B₁.

Για το $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x-1}$ έχουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 1^+} x = 1 > 0$ και $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) = 0$ με $x-1 > 0$

Άρα $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x-1} = +\infty$ δηλαδή $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$

Επομένως η ευθεία $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f

Επίσης είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1$ δηλαδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

Επομένως η ευθεία $y = 1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη C_f στο $+\infty$

B₂.

Θεωρώ τη συνάρτηση $K(x) = f(x) - g(x)$ με πεδίο ορισμού $(1, +\infty)$

Η K είναι συνεχής στο $[e, e^2]$ ως πράξεις συνεχών.

$$K(e) = f(e) - g(e) = \frac{e}{e-1} - \ln e = \frac{e}{e-1} - 1 = \frac{e-e+1}{e-1} = \frac{1}{e-1} > 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} K(e^2) &= f(e^2) - g(e^2) = \frac{e^2}{e^2-1} - \ln e^2 = \frac{e^2}{e^2-1} - 2\ln e = \frac{e^2}{e^2-1} - 2 = \\ &= \frac{e^2 - 2e^2 + 2}{e^2-1} = \frac{2-e^2}{e^2-1} < 0 \quad (2) \end{aligned}$$

$(1) \cdot (2) \Rightarrow K(e) \cdot K(e^2) < 0$ επομένως με βάση το θεώρημα Bolzano η εξίσωση $K(x) = 0$ δηλαδή η εξίσωση $f(x) = g(x)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (e, e^2)

B₃.

Το πεδίο ορισμού A_φ της φ είναι $A_\varphi = \{x \in A_f \text{ με } f(x) \in A_g\} =$

$$\begin{aligned} &= \left\{ x \in (1, +\infty) \text{ με } \frac{x}{x-1} \in (0, +\infty) \right\} = \\ &= (1, +\infty) \end{aligned}$$

B₄.

Για να ορίζεται η h πρέπει και αρκεί $\frac{x}{x-1} > 0 \Leftrightarrow x(x-1) > 0 \Leftrightarrow x < 0 \text{ ή } x > 1$

Δηλαδή το πεδίο ορισμού της h είναι το $A_h = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty) \neq A_\varphi$, άρα οι συναρτήσεις φ και h δεν είναι ίσες.

ΘΕΜΑ Γ**Γ₁.**

i. Θεωρώ τη συνάρτηση $H(x) = \frac{f(x) - \eta\mu x}{x}$, $x \neq 0$ (1)

Τότε $\lim_{x \rightarrow 0} H(x) = 0$ από υπόθεση και $f(x) = xH(x) + \eta\mu x$ (2) από την (1)

$$(2) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (xH(x) + \eta\mu(x)) = 0 \cdot 0 + 0 = 0$$

Επειδή η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, είναι συνεχής στο 0.

$$\text{Συνεπώς } f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \eta\mu x + \eta\mu x}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{f(x) - \eta\mu x}{x} + \frac{\eta\mu x}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \eta\mu x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 0 + 1 = 1 \end{aligned}$$

ii. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(0, f(0)) = (0, 0)$ είναι

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y - 0 = 1(x - 0) \Leftrightarrow y = x$$

Γ₂.

$$\text{Είναι } f'(x)f''(x) = x \Leftrightarrow 2f'(x)f''(x) = 2x \Leftrightarrow$$

$$\left((f'(x))^2 \right)' = (x^2)' \Leftrightarrow$$

$$(f'(x))^2 = x^2 + c \quad (3)$$

$$\text{Για } x = 0 \text{ η (3) δίνει } (f'(0))^2 = c \Leftrightarrow 1^2 = c \Leftrightarrow c = 1$$

$$\text{Η (3) γίνεται } (f'(x))^2 = x^2 + 1 \Leftrightarrow f'(x) = \pm \sqrt{x^2 + 1} \neq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Άρα η f διατηρεί πρόσημο. Και επειδή $f'(0) = 1 > 0$, θα είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα $f'(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ₃.

$$f''(x) = \left(\sqrt{x^2 + 1} \right)' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad (4)$$

Από την (4) για κάθε $x < 0$ προκύπτει $f''(x) < 0$

για κάθε $x > 0$ προκύπτει $f''(x) > 0$

και για $x = 0$ προκύπτει $f''(x) = 0$

Οπότε η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 0]$ και κυρτή στο $[0, +\infty)$, παρουσιάζει δε καμπή στο σημείο $(0, f(0)) = (0, 0)$.

Γ₄.

Επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) = \sqrt{x^2 + 1} > 0$, η f είναι γνησίως αύξουσα

στο $\mathbb{R}$, επομένως είναι '1-1'

Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f .

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα

$$f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) \quad (5)$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(0, f(0)) = (0, 0)$ είναι

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y - 0 = 1(x - 0) \Leftrightarrow y = x$$

f κοίλη στο διάστημα $(-\infty, 0] \Rightarrow$ η C_f είναι κάτω από την εφαπτομένη $y = x$ με εξαίρεση το σημείο επαφής, επομένως για κάθε $x \in (-\infty, 0]$ είναι $f(x) \leq x$ και

$$\text{επειδή } \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \text{ θα είναι και } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

f κυρτή στο διάστημα $[0, +\infty) \Rightarrow$ η C_f είναι πάνω από την εφαπτομένη $y = x$ με εξαίρεση το σημείο επαφής, επομένως για κάθε $x \in [0, +\infty)$ είναι $f(x) \geq x$ και

$$\text{επειδή } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \text{ θα είναι και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Η (5) δίνει ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $(-\infty, +\infty)$.

Άρα και πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το $(-\infty, +\infty)$

ΘΕΜΑ Δ

Δ_1 .

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x^3 + 3x + 1) = 1 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{Θέτω } u = u(x) = x \ln x \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow 0^+} u &= \lim_{x \rightarrow 0^+} u(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \right] = \left(\frac{-\infty}{+\infty} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x} \right)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x} \right)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0 \end{aligned}$$

Δηλαδή $u \rightarrow 0$ όταν $x \rightarrow 0$

$$\text{Επομένως } \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} = \lim_{u \rightarrow 0^+} e^u = 1 \text{ και λόγω της (2) } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \quad (3)$$

$$\text{Ακόμα είναι } f(0) = (-0^3 + 3 \cdot 0 + 1) = 1 \quad (4)$$

Από τις (1), (3), (4) συμπεραίνουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 1$ άρα η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

$$\text{Ακόμα } f(0) = (-0^3 + 3 \cdot 0 + 1) = 1$$

Επειδή τώρα είναι $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 1$ η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$

Για την παραγωγισιμότητα είναι

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x^x - 1)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(e^{x \ln x} - 1)'}{x'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} (x \ln x)' = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} (\ln x + 1) = 1 \cdot (-\infty) = -\infty \text{ συνεπώς η } f \end{aligned}$$

δεν παραγωγίζεται στο $x_0 = 0$

Δ₂.

$$\text{Είναι } f'(x) = \begin{cases} -3x^2 + 3, & -1 \leq x < 0 \\ x^x(\ln x + 1), & 0 < x \leq \frac{2}{e} \end{cases}$$

i.

Τα κρίσιμα σημεία είναι τα εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού στα οποία μηδενίζεται η πρώτη παράγωγος και τα σημεία στα οποία η f δεν παραγωγίζεται.

$$\begin{aligned} \text{Όταν } -1 \leq x < 0, \text{ είναι } f'(x) = -3x^2 + 3 \text{ με } f'(x) = 0 &\Leftrightarrow -3x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow \\ &-3(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \\ &x = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Όταν } 0 < x \leq \frac{2}{e}, \text{ είναι } f'(x) = x^x(\ln x + 1) \text{ με } f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow \\ &\ln x = -1 \Leftrightarrow \\ &x = \frac{1}{e} \end{aligned}$$

Μετά από αυτά βλέπουμε ότι τα κρίσιμα σημεία είναι το $x = 0$ και το $x = \frac{1}{e}$.

Τό σημείο $x = -1$ δεν είναι κρίσιμο αφού δεν είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού.

ii.

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	-1	0	$\frac{1}{e}$	$\frac{2}{e}$	
f'	0	+	-	0	+
f		↗	↘	↗	

Από τον πίνακα βλέπουμε ότι η f είναι :

γνησίως αύξουσα στο διάστημα $A_1 = [-1, 0]$

γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $A_2 = \left[0, \frac{1}{e}\right]$

γνησίως αύξουσα στο διάστημα $A_3 = \left[\frac{1}{e}, \frac{2}{e}\right]$

Όταν $x \in A_1$, το σύνολο τιμών είναι το $f(A_1) = [f(-1), f(0)] = [-1, 1]$

Όταν $x \in A_2$, το σύνολο τιμών είναι το $f(A_2) = \left[f\left(\frac{1}{e}\right), f(0)\right] = \left[\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}, 1\right]$

Όταν $x \in (A_3)$, το σύνολο τιμών είναι το $f(A_3) = \left[f\left(\frac{1}{e}\right), f\left(\frac{2}{e}\right) \right] =$

$$\left[\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}, \left(\frac{2}{e}\right)^{\frac{2}{e}} \right]$$

Τελικά για $x \in \left[-1, \frac{2}{e} \right]$ το σύνολο τιμών είναι το $[-1, 1]$

Δ₃.

Αφού η f είναι συνεχής στο $\left[-1, \frac{2}{e} \right]$ θα έχει μέγιστη τιμή M και ελάχιστη τιμή μ .

$$\text{Άρα } \mu \leq f(\alpha) \leq M \Leftrightarrow 2\mu \leq 2f(\alpha) \leq 2M \quad (1)$$

$$\text{και } \mu \leq f(\beta) \leq M \Leftrightarrow 3\mu \leq 3f(\beta) \leq 3M \quad (2)$$

$$(1) + (2) \text{ δίνει } 5\mu \leq 2f(\alpha) + 3f(\beta) \leq 5M \Leftrightarrow \mu \leq \frac{2\alpha + 3\beta}{5} \leq M$$

άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left[-1, \frac{2}{e} \right]$ έτσι ώστε $f(\xi) = \frac{2f(\alpha) + 3f(\beta)}{5}$

Δ₄.

Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $\ln x \leq x - 1$ με το ίσον να ισχύει μόνο για $x = 1$.

Οπότε για κάθε $x \in \left[\frac{1}{e}, \frac{2}{e} \right]$ θα είναι $\ln x < x - 1 \Rightarrow$

$$\ln x + 1 < x \Rightarrow$$

$$x^x (\ln x + 1) < x^x x \Rightarrow$$

$$f'(x) < xf(x) \Rightarrow$$

$$\int_{\frac{1}{e}}^{\frac{2}{e}} f'(x) dx < \int_{\frac{1}{e}}^{\frac{2}{e}} xf(x) dx \Rightarrow$$

$$\left[f(x) \right]_{\frac{1}{e}}^{\frac{2}{e}} < \int_{\frac{1}{e}}^{\frac{2}{e}} xf(x) dx \Rightarrow$$

$$f\left(\frac{2}{e}\right) - f\left(\frac{1}{e}\right) < \int_{\frac{1}{e}}^{\frac{2}{e}} xf(x) dx \Rightarrow$$

$$\left(\frac{2}{e}\right)^{\frac{2}{e}} - \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}} < \int_{\frac{1}{e}}^{\frac{2}{e}} xf(x) dx$$